Procesy stochastyczne

Lista 5

Zad 1. Wykazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej f o wahaniu skończonym na $[a,b]$ zachodzi $\int_a^b f(t)df(t) = \frac{1}{2}(f^2(a) - f^2(b))$. (Hint: patrz stopka 2)

Zad 2. Niech $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$ będzie podziałem odcinka, gdzie $t_k^n = \frac{kT}{n}$. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})^2 = T, \text{ w sensie zbieżności w } L^2.$$

Uzasadnić, że wynika stąd, iż wahanie procesu Wienera na odcinku $[0,T]$ jest nieskończone.

Zad 3. Niech $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$ będzie podziałem odcinka, gdzie $t_k^n = \frac{kT}{n}$. Wykazać, że dla procesu stochastycznego $f(t)$, $t \geq 0$, średnio-kwadratowe granice sum całkowych Ito

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^n)(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_{k+1}^n)(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}).$$

na ogół się różnią.[1]

Zad 4. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $h \in L_2([0,t])$ całka Paleya-Wienera $\int_0^t h(s)dW_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \int_0^t h^2(s)ds)$.

Zad 5. Wykazać, że dla $h \in L_2([0,t])$ i $0 < u < t$ zachodzi $\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h(s)I_{[0,u]}(s)dW_s$ p.n.

Zad 6. Wykazać, że dla $h \in C^{(1)}([0,t])$ zachodzi

$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds \qquad p.n.$$

(Hint: patrz stopka 3)

Zad 7. Niech $C_p := (E|W_1|^p)^{1/p}$. Wykazać, że dla $1 \leq p < \infty$, przekształcenie $h \mapsto C_p^{-1}\int_0^t h(s)dW_s$ jest izometrycznym włożeniem $L_2([0,t])$ w $L_p(\Omega)$.

Zad 8. Wykazać, że jeśli $X \in \mathcal{L}_2^T$, $0 \leq a \leq b \leq T$ i ξ jest ograniczoną $\mathcal{F}_a$-mierzalną zmienną losową, to $\{\xi X_t I_{(a,b]}(t)\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}_2^T$ oraz

$$\int_a^b \xi X dW = \xi \int_a^b X dW$$

(Uwaga: $\int_a^b X_t dW_t$ definiujemy jako $\int_0^T I_{(a,b]}(t) X_t dW_t$).

Zad 9. Wykazać, że jeśli $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_m < T$ oraz ξ_k są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalnymi to proces $X = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k I_{(t_k, t_{k+1}]}$ należy do $\mathcal{L}_2^T$ oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.

Zad 10. Załóżmy, że X jest procesem prognozowalnym, ciagłym w L_2 (tzn. $t \mapsto X_t$ jest ciągła $[0,T]$ w $L_2(\Omega)$). Wykazać, że wówczas $X \in \mathcal{L}_2^T$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq t_2^{(n)} \cdots < t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_n - 1} X_{t_k} (W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}) = \int_0^T X dW, \text{ w sensie zbieżności w } L^2.$$

Zad 11. Wykazać, z definicji całki Itô, że dla dowolnego $T > 0$:

a) $W_T = \int_0^T dW_t$, lub ogólniej $W_b - W_a = \int_a^b dW_t$, gdy $0 \leq a \leq b \leq T$,

b) $\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T$,[2]

c) $\int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt$, [3]

d) $\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3}W(T)^3 - \int_0^T W(t)dt$, [4]

---

[1]Hint: Rozważyć $f(t) = W_t$
[2]Hint: skorzystać z tożsamości $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$
[3]Hint: skorzystać z tożsamości $c(b-a) = (db - ca) - b(d-c)$
[4]Hint: skorzystać z tożsamości $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$